

LA APARICION DEL LENGUAJE ARITMETICO-ALGEBRAICO

Eugenio Filloy Yagüe

*Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional.*

La investigación educativa en países como México se enfrenta con problemas muy diferentes a los que se pueden encontrar en los países llamados industrializados.¹

Es claro que todo análisis que pretenda esclarecer cierto tipo de problemas, y éste es un primer motor de nuestra investigación educativa, tendrá que darse en el marco específico de nuestro sistema educativo; pero, también como contraparte unitaria, este análisis, para ser tal, no puede sino intentar transformar las condiciones en las que la enseñanza de las matemáticas se está dando en el país. Esto condiciona claramente el campo y, por ende, la metodología de la investigación; pero, también, en un punto usualmente desdeñado, imprime sobre sus resultados la necesidad de ser utilizados, de ser puestos a prueba allí mismo, donde pretendidamente tratan de echar luz, donde sus modificaciones tendrán que ser tomadas en cuenta para continuar adelante, para profundizar en los hechos indagados y poder construir nuevas hipótesis que tengan en cuenta el trabajo ya realizado.

Esto conduce a que, por lo menos en algunos de sus aspectos, estos problemas estén muy ligados al proceso mismo de la enseñanza, esto es a la pedagogía de las matemáticas. Habría, sin embargo, que aclarar que ello no implica un abandono de problemas de alcance teórico, incluidos sus métodos lógicos y apropiados, si-

1. Eugenio FILLOY, "Investigación en Matemática Educativa en México. Un Reporte", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2, No. 2, pp. 233-256, Francia, 1981. En este trabajo se presenta una descripción más amplia.

no que estos trabajos se dan dentro de programas más vastos, en los que el trato directo con estudiantes y maestros está presente.

En este trabajo se tratará de demostrar que el análisis histórico-crítico del desarrollo de las ideas matemáticas posibilita, por ejemplo, la construcción de secuencias de aprendizaje que dan cuenta de los logros de la investigación teórica, lo que cobra un pleno sentido cuando, a su vez, la historia de las ideas se ve enriquecida por las nuevas hipótesis arrojadas por la puesta a prueba de las secuencias pedagógicas en los sistemas educativos mismos. Sólo en estos casos podríamos estar reseñando trabajos en el terreno de la educación en matemáticas y no en el de la historia o la epistemología de las matemáticas.

El análisis epistemológico

Después de haber sido relegada a ser el pasatiempo de los matemáticos, no obstante la producción de obras deslumbrantes como la de Van der Waerden², o visiones generales como la de Boyer³, la historia ha vuelto a cobrar su justa dimensión; ha llegado incluso a los libros de texto.⁴

Sin embargo, ya desde antes, el mismo Boyer⁵ había intentado capturar otros aspectos importantes como el devenir de las ideas. A este ejemplo, se podría añadir muchos otros títulos que pueden ilustrar este gran retorno de la historia como instrumento para ver el presente.

Nuestras ideas acerca de lo que son los procesos rudimentarios de la construcción de modelos matemáticos han cambiado totalmente a partir de trabajos históricos sobre los babilonios, concre-

tamente los trabajos de Neugebauer.⁶ De este modo, nuestras concepciones sobre el nacimiento de la teoría de las proporciones, la deducción o la axiomatización han adquirido tonalidades sutiles que antes no percibíamos; este es el caso de Szabo.⁷

De este reencuentro entre la historia y la epistemología, a través de la historia de las ideas, también la didáctica de las matemáticas ha empezado a sacar provecho.

La lectura de textos

El nuevo acercamiento consiste en realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir del método histórico-crítico, para después poner a prueba los hallazgos teóricos en los sistemas educativos y, luego de esta experimentación, volver, sobre la base de los resultados prácticos, a tener una nueva visión de los problemas de la historia de las ideas que correspondan a los resultados didácticos.

Un primer ejemplo aclarará más esta idea.⁸ El análisis de las aritméticas de Diofanto y Bombelli⁹ y su contraste con el *Arte Analítico* de Vieta, propone hipótesis interesantes sobre el desarrollo de las primeras nociones algebraicas en la escuela secundaria (con alumnos de 12 a 15 años), tal y como se desprende, por ejemplo, del trabajo de Jacob Klein.¹⁰ A partir de estos resultados, se puede inferir que el cambio más significativo en la simbolización, en esa etapa del nacimiento del álgebra, reside en el paso del concepto matemático de incógnita al concepto matemático de varia-

2. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, Holand, Noordhoff, 1954.

3. C.B. BOYER, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley, 1968.

4. C. EDWARDS, *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer Verlag, 1979.

5. C.B. BOYER, *The History of Calculus*, New York, John Wiley, 1959.

6. O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*, New York, Dover Publications Inc., 1969.

7. Arpad SZABO, *Les débuts des Mathématiques grecques*, Paris, Vrin, 1977.

8. Eugenio FILLOY, "Álgebra del nivel medio y análisis epistemológico: de Bombelli a Vieta", *Actas del V Congreso Nacional de Profesores*, México, 1980.

9. Rafael BOMBELLI DA BOLOGNA, *L'Algebra*, Milano, Editorial Feltrinelli, 1963; y para Diofanto de Alejandría, véase F. VERA, *Científicos griegos* (recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas). Vol. 2, México, Aguilar, 1970.

10. J. KLEIN, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Massachusetts Institute of Technology, The M.I.T. Press, 1968.

ble. Tránsito que pasa también por el hecho no sólo de resolver problemas aritméticos complicados, ya logrado, quizá más eficientemente que por Vieta, en la misma aritmética de Diofanto, sino por la reflexión sobre las operaciones que siempre se efectúan para resolver tales problemas. Esta reflexión sobre las operaciones lleva a Vieta a hablar no sólo de incógnitas, sino también de los coeficientes de las ecuaciones que resultan al hacer el análisis zetético de los problemas como variables; esto es, los coeficientes tienen que operarse entre sí, no representando tan sólo un número, desconocido o no, pero un solo número al fin, sino que representarán a todos los números que puedan provenir de ecuaciones que resulten del análisis de los problemas aritméticos.

Estos hechos parecieran completar el cuadro, sobre todo cuando el análisis se continúa sobre estas líneas, como lo hace el mismo Klein¹¹ o Jones.¹² Este cambio de óptica (el de Vieta) generará inmediatamente otros, debido a los problemas que plantea la operación de las mediciones, como puede verse nítidamente en la obra de Simon Stevin. Se generará, como decíamos, un cambio en el concepto mismo de número, esto es, nuevos objetos (ideales) devendrán números: los decimales, por ejemplo, que pueden operarse de la misma manera.

Pero, cuando se construyen secuencias pedagógicas tratando de seguir este hilo conductor, como en Alarcón/Figueras¹³, y se observa el comportamiento de la población (en sentido estadístico) en las distribuciones que señalan la evolución de las habilidades matemáticas, se encuentra que hay otros elementos que no han sido tomados en cuenta, y que habría que ir a buscar la historia de la operatividad en su desarrollo en el Oriente, así como la evolu-

ción de otra historia, aparentemente ajena, pero que en la práctica se revela totalmente hermana con la de la operatividad: la del análisis de la variación y el cambio, ya sea, en primera instancia, por métodos netamente aritméticos, como los de la variación proporcional, o en un plano más profundo, los que acarrea la representación pictográfica de la primera y segunda variaciones en el movimiento, en el cambio en la intensidad de la luz, o en la propagación del calor.

Pareciera muy importante, en este momento, volver a la historia y analizar las obras de la Edad Media a este respecto. En este sentido, la deuda que tenemos con los historiadores¹⁴ es invaluable, pues sus recopilaciones, traducciones y comentarios nos proporcionan un material vivo que está a la espera de que se vaya a ellos con nuevos ojos: los de los problemas de la enseñanza del álgebra, en el preciso momento en que el álgebra va a permitir introducir las ideas analíticas en la geometría e, inmediatamente después, los métodos del cálculo infinitesimal.

Asimismo, para entender el salto entre la aritmética y el álgebra (y la aparición del lenguaje aritmético-algebraico) hay que echar luz sobre la época inmediatamente anterior a la publicación de los libros de Bombelli y Vieta. De ello vamos a hablar a continuación.

Los libros de Abbaco

Según se aprecia en la obra recopiladora de Van Egmond¹⁵, los libros de abbaco representan la vía más factible de asimilación de la matemática oriental a la civilización europea occidental; en

11. *Id.*

12. C.V. JONES, *On the concept of One as a number*, Toronto University, Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, 1978.

13. J. ALARCON, O. FIGUERAS, E. FILLOY, M. GISPERT; S. LEMA, B.M. PARRA, J. RECIO, T. ROJANO, G. ZUBIETA, *Matemáticas 100 Horas I y II*, México, Bogotá, Caracas, Santiago, San Juan y Panamá, Fondo Educativo Interamericano, 1981-1982.

14. Véase: E. GRAN, *Nicole Oresme and the Kinematics of Circular Motions*, London, The University of Wisconsin Press, 1971; E. GRANT, *Nicole Oresme, De Proportionibus and Pauca respicientes*, London, The University of Wisconsin Press, 1966. M. CLAGETT, *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*, Madison, Milwaukee and London, The University of Wisconsin Press, 1968; y M. CLAGETT, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, London, The University of Wisconsin Press, 1959.

15. W.V. EGMOND, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance* (A catalog of Italian Abacus Manuscripts and Printed Books to 1600), Suplemento agli *Annali dell'Instituto e Museo di Storia della Scienza*, Fascicolo 1, Firenze, Istituto e Museo di Storia della Scienza, 1980.

esta adaptación de la matemática indo-arábiga a los problemas propios de una sociedad en pujante ascenso económico (la de Italia de los siglos XV y XVI), se gesta un nuevo tipo de matemática.

Esta matemática está presente y lista para su aplicación en los llamados libros de *abbaco*, cuyo contenido comprende, esencialmente, la presentación del sistema posicional de numeración indo-arábiga, las cuatro operaciones aritméticas elementales y problemas comerciales resueltos. Estos involucran las cuatro operaciones elementales, así como el uso de la regla de tres simple y compuesta, del interés simple y compuesto, y de la resolución de algunas ecuaciones algebraicas simples; algunos libros incluyen tablas de multiplicación y de equivalencias monetarias y de pesos y medidas.

El primer libro de *abbaco* del que se tiene noticia fue escrito en latín en el Cercano Oriente (Grecia) y es introducido en Europa Occidental, en su primera versión vernácula, entre los siglos XII y XIII (hacia 1290).

El significado corriente de la palabra *abbaco* era el de "el arte de calcular, de contar y de la aritmética". El término fue usado por primera vez en este sentido por Leonardo de Pisa, mejor conocido como Leonardo Fibonacci¹⁶, quien escribió, durante el siglo XIII, un compendio sobre toda la matemática práctica conocida hasta entonces. Esto ocurre de manera natural pues, siendo su padre un comerciante de Pisa residente en Arabia, Fibonacci se educa con profesores árabes y aprende los sistemas árabes, tanto comerciales como matemáticos; de ahí que su obra contenga conocimientos de matemática práctico-comercial, de acuerdo con el sistema indo-arábiga, así como una particular influencia tanto de su propia experiencia en la vida mercantil, como de su instrucción en una gran variedad de textos árabes sobre álgebra, geometría y matemáticas financieras.

La producción de libros de *abbaco* aumenta grandemente en Italia hacia el siglo XV; se estima que en ese entonces ya existían

400, con aproximadamente 400 problemas diferentes resueltos en cada uno de ellos; así, respecto de problemas, aun eliminando las repeticiones libro a libro, la producción ascendía al orden de las decenas de miles.

Casi simultáneamente con la llegada a Occidente de los primeros libros, aparecen las escuelas de *Abbaco*. Se sabe que la primera fue fundada en el año 1284 en la Comuna de Verona y que a estas "escuelas" acudían, principalmente, los hijos de los comerciantes y, en general, los hijos de hombres de negocios, para ejercitarse en las matemáticas comerciales y continuar su formación básica en gramática. Las escuelas de *Abbaco* proliferan hacia el siglo XIV; se sabe que tan sólo en Florencia, hacia 1343, existían seis con más de mil estudiantes. Y, aunque este crecimiento no se mantiene estable en siglos posteriores, se tienen referencias acerca de la existencia de alrededor de tres o cuatro escuelas en cada ciudad importante (Florencia, Milán, Pisa, Venecia, Lucca), que funcionaban en forma continua a partir del siglo XIV y durante todo el Renacimiento.

La explicación histórica más plausible¹⁷ de la aparición y multiplicación de libros, escuelas y maestros de *abbaco* en Occidente, es de índole social y económica. Con la llamada "revolución comercial del siglo XIII en Italia" se produce un cambio social importante: el poder monetario empieza a sobreponerse al poder feudal, de ahí que se vuelva más codiciado el control de las actividades mercantiles y financieras, junto con las "habilidades" requeridas para su manejo, que la posesión misma de la tierra. Así, el surgimiento de esta "nueva clase social" que accede al poder, impone la necesidad de crear los medios para hacer efectivo este nuevo tipo de herencia lo mismo que promover las habilidades necesarias para poder participar del poder comercial. Estos conocimientos incluyen, por supuesto, los contenidos de los libros de *abbaco*, producidos originalmente para servir de consulta a los contadores y comerciantes de la época y, ante la necesidad de hacerlos accesi-

16. Sobre Leonardo FIBONACCI DE PISA véase: Boncompagni, Baldassarre, *Scritti di Leonardo Pisano*, Vol. 2, Roma, 1857.

17. T. ROJANO, "La Matemática Práctica del Renacimiento en Italia - una posible fuente para la detección de 'otras' habilidades aritméticas", Ponencia en CORMEX, Taxco, Gro., México, 1982.

bles a los hijos de los comerciantes, se crean las escuelas y maestros de abaco, financiados, al menos en sus inicios, por los propios padres.

La edad de los niños que acudían a estas escuelas era de 10 y 11 años y recibían allí adiestramiento en los principios básicos de la aritmética y la matemática práctica (escritura de los dígitos indo-arábigos, las cuatro operaciones con enteros y fracciones, resolución de problemas comerciales, y manejo de equivalencias monetarias y de pesos y medidas), así como de la gramática. Puede pensarse que las escuelas de Abaco funcionaban como la enseñanza media básica, la cual servía de puente entre la enseñanza básica (escuela romana clásica) y la universidad (las primeras, fundadas en Europa en los siglos XII y XIII).

A pesar de que estas escuelas pueden considerarse como parte integral de la enseñanza escolarizada en su época, en realidad constituyen una verdadera innovación en el ámbito educativo, pues, a diferencia de las universidades, en donde se instruía a las élites y que funcionaban, sobre todo, como lugares de discusión y reflexión sobre el saber, las escuelas de Abaco desempeñaban el papel de transmisores de conocimientos aplicables en la vida cotidiana. Hacia el siglo XV, la actividad comercial no sólo se realizaba entre los comerciantes y hombres de negocios, sino que empezaba a formar parte de la vida cotidiana de lo que entonces era ya población urbana.

Es así como las escuelas y libros de Abaco vienen a satisfacer una demanda social de la nueva civilización europea y tanto la satisfacen que se convierten en una tradición que persiste a través de siglos como compañera de ese nuevo patrón cultural, de esa nueva mentalidad, creada por la revolución comercial.

Para apreciar en toda su extensión el papel social y educativo de los libros de Abaco, bastaría revisar un poco los contenidos matemáticos de los actuales libros de texto destinados a la instrucción básica en cualquier país del mundo, para darse cuenta de que, esencialmente, son los mismos que podrían extraerse de un libro "tipo" de abaco¹⁸; esto les confiere el carácter de "asimilado-

res" de la matemática oriental a las necesidades de la nueva cultura occidental (que abarca ya más de cinco siglos) a través de la educación escolarizada.

Un problema de abaco

A continuación se presentará una traducción literal del italiano de un problema resuelto en la sección recreativa del *Trattato Di Fioretti*¹⁹ y, más adelante, una "traducción" a la terminología (simbología) algebraica moderna del mismo problema.*

Trattato Di Fioretti Problema I (pág. 15)

Enunciado: Haz de 19, tres partes en la proporcionalidad continua, tal que, multiplicada la primera con las otras dos y la segunda parte multiplicada con las otras dos y la tercera parte multiplicada con las otras dos, la suma de las tres multiplicaciones juntas hagan 228.

Resolución: Ahora, en nuestro caso, hay que saber que si se multiplica 19 con el doble de la segunda parte dará 228, que es igual que si se multiplica el doble de 19, a saber 38, en la segunda parte, dará 228. Y que esto sea verdad se quiere clarificar.

Nos habíamos propuesto que se divida 19 en tres partes en la proporcionalidad continua y que, multiplicada la primera por las otras dos y la segunda parte multiplicada por las otras dos y la

19. Mo. Antonio De'MAZZINGHI, *Trattato di Fioretti* (nella trascelta a cura di Mo. Benedetto, secondo la lezione del Codice L., IV, 21, (Sec. XV) della Biblioteca degl'Intronati di Siena, e con introduzione di Gino Arrighi), Pisa, Domus Galileana, 1967.

* La traducción del original es literal (E.F.Y.), apenas modificada para hacer el texto en español más accesible. Sin embargo, se ha tratado de respetar el texto de base para dar cuenta tanto del ritmo expositivo como de las estrategias discursivas.

tercera parte multiplicada por las otras dos, la suma de las tres multiplicaciones juntas hagan 228.

De donde multiplicar la primera por las otras dos es tanto como multiplicar la primera por la segunda y la segunda consigo misma. Y multiplicar la segunda por las otras dos es tanto como multiplicar la segunda por la primera y la segunda por la tercera. Y, por último, también obtenemos la multiplicación de la segunda consigo misma y la multiplicación de la tercera por la segunda. De donde estas tres multiplicaciones que son seis equivalen a multiplicar la primera por la segunda *dos veces* y la segunda consigo misma *dos veces* y la tercera por la segunda *dos veces*.

Así, si se aguza bien el ojo, eso es como multiplicar la segunda parte por la suma de todas las tres partes *dos veces*. Y multiplicar la segunda parte por la suma de todas las tres *dos veces*, es como multiplicar la segunda parte por el doble de la suma de todas las tres, y eso es como multiplicar *el doble* de la segunda parte por la suma de todas las tres. De donde resulta entonces que, multiplicando el doble de la segunda parte por 19, que es la suma de todas las tres, dará 228. De donde, partiendo de 118 entre 19 resultará el doble de la segunda parte, y partiendo 228 entre 19 se obtiene 12, y es 12 *dos veces* contada la segunda parte.

De donde la segunda parte es 6. Y una vez encontrada ésta, las otras dos restan 13; de donde diremos, puesto que las partes están en proporcionalidad continua, que tanto hace multiplicar la primera parte por la tercera, como la segunda consigo misma; de donde lo requerido se obtiene, al dividir 13 en dos partes, donde la primera multiplicada por la otra dé 36, esto es, el cuadrado de 6.

Y para esto se da esta "regla": parte 13 en la mitad ($6\frac{1}{2}$), multiplícala consigo misma (da $42\frac{1}{4}$); toma 36 dejando $6\frac{1}{4}$; toma la raíz que es $2\frac{1}{2}$ y réunela con la mitad de 13, que es $6\frac{1}{2}$, dando 9.

Este tanto es la mayor parte y, para la otra, resta $2\frac{1}{2}$ de la mitad de 13, esto es, de $6\frac{1}{2}$, quedando 4. Este tanto es la menor. De donde se ha dividido 13 en 2 partes que, multiplicada la una por la otra, da 36. De donde, hemos hecho tres partes de 19 en proporción continua de la que la primera, multiplicada por las otras dos, y la segunda, multiplicada por las otras dos, y la tercera, multiplicada por las otras dos, juntando las multiplicaciones, da 228. Y la menor es 4, la mediana 6, la mayor es 9.

Traducción a la simbología moderna

Enunciado:

Encontrar tres números x , y , z , tales que:

$$\textcircled{1} \quad x + y + z = 19$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{x}{y} = \frac{x}{z}$$

$$\textcircled{3} \quad x(y + z) + y(x + z) + z(x + y) = 228$$

Resolución

Hay que saber que si

$$(19)(2y) = 228$$

que es igual que

$$2(19)y = 228; \quad 38y = 228$$

Esto hay que clarificarlo:

Para ello hay que desarrollar cada término de $\textcircled{3}$, tomando en cuenta que $xz = yy$ (por $\textcircled{2}$):

$$x(y + z) = xy + yy$$

$$y(x + z) = yx + yz$$

$$z(x + y) = yy + zy$$

Estas tres multiplicaciones son en realidad seis y se pueden reducir así:

$$xy + yy + yx + yz + yy + zy = 2xy + 2yy + 2zy.$$

Estas tres multiplicaciones pueden escribirse así:

$$2xy + 2yy + 2zy = y(2x + 2y + 2z).$$

Y este último miembro es lo mismo que:

$$y [2(x + y + z)],$$

y esto es lo mismo que:

$$2y(x + y + z)$$

pero sabemos que $x + y + z = 19$ por (1), así que:

$$2y(x + y + z) = 2y(19)$$

y sabemos que $2y(x + y + z) = 228$, así que:

$$2y(19) = 228.$$

De donde, si $228 \div 19 = 12$, se tiene que

$$2y = 12 \text{ y así}$$

$$y = 6$$

Una vez encontrada y , se tiene que

$$x + z = 13.$$

Así que ahora tenemos un nuevo problema:

Encontrar dos números x, z tales que

$$(a) \quad x + z = 13; \quad (b) \quad \frac{x}{6} = \frac{6}{z}$$

(b) se puede escribir así:

$$xz = 36.$$

Para resolver esto se da otra regla:

1o.) Divídase 13 por la mitad:

$$13 \div 2 = 6 \frac{1}{2}$$

2o.) Multiplicar $6 \frac{1}{2}$ en sí:

$$(6 \frac{1}{2}) (6 \frac{1}{2}) = 42 \frac{1}{4}$$

3o.) Hágase la resta:

$$42 \frac{1}{4} - 36 = 6 \frac{1}{4}$$

4o.) Extraer raíz cuadrada a $6 \frac{1}{4}$:

$$\sqrt{6 \frac{1}{4}} = 2 \frac{1}{2}$$

5o.) Sumar $2 \frac{1}{2}$ con la mitad de 13 ($6 \frac{1}{2}$):

$$2 \frac{1}{2} + 6 \frac{1}{2} = 9$$

Este número es el mayor de los dos números buscados, digamos

$$x = 9$$

Para encontrar la otra, hágase lo siguiente:

6o.) Restar $2 \frac{1}{2}$ de la mitad de 13 ($6 \frac{1}{2}$):

$$6 \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{2} = 4$$

Este es el menor de los dos números buscados, digamos

$$z = 4$$

Así, se tiene que $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$ cumplen con las condi-

ciones ①, ②, ③.

No es difícil verificar que los pasos 1o.) a 6o.) correspondientes a la solución del sistema:

$$x + z = 13$$

$$xz = 36$$

corresponden, a su vez, a la solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 - mx + n^2 = 0,$$

donde

$$n^2 = xz = 36 \quad \text{y} \quad m = x + z = 13.$$

La aparición del lenguaje aritmético-algebraico

Lo primero que salta a la vista cuando se enfrenta un problema como el anterior, incluida su resolución, es que ya nadie habla en ese lenguaje; quizás la traducción, escrita con la simbología actual del álgebra, podría parecer un problema avanzado típico de un texto escolar moderno; sin embargo, difiere de éstos en que las estrategias que recorren su resolución no obedecen a nuestros hábitos; además, nosotros no realizaríamos muchas de las operaciones y pasos intermedios que allí parecen tener una presencia necesaria. Hoy en día, si lo vemos desde el punto de vista de los lenguajes estructurados de los adultos, el lenguaje de los libros de abaco constituye una lengua muerta. Lengua cuyas traducciones al lenguaje algebraico actual nos llenan de asombro por lo novedoso (para nosotros) de acciones que concurren a los mismos resultados

que los nuestros, pero que recorren caminos no pensados y por su presencia, problema a problema, libro a libro, nos muestran habilidades que no se emparentan con las que hemos desarrollado al construir y utilizar nuestro lenguaje algebraico, y que nunca nos vimos impelidos a construir, desarrollar, utilizar, al enfrentar problemas con nuestras habilidades y conocimientos aritméticos.

Es casi una obviedad que, al construir aparatos conceptuales nuevos, que se nos imponen sin haberse erigido bien estructurados con (o sobre) otros fuertemente arraigados con anterioridad, las nuevas habilidades tienden a opacar a las viejas y, dada la fragilidad con que, en este momento, se pueden utilizar los nuevos recursos, las nuevas técnicas de resolución, etc., nos encontramos con que incluso los problemas que se habían dominado tiempo atrás, se tornan difíciles de modelar en el nuevo lenguaje en que se expresa el incipiente aparato conceptual que está en vías de construirse.

Pero ocurre, también, que las estructuras intelectuales bien ancladas tienden a perpetuarse y nos obligan a retomar situaciones que en el nuevo lenguaje, al modelarse, podrían resolverse con operaciones simples y rutinarias.

Aceptemos que habíamos comenzado con lectura e interpretación de textos antiguos (nivel epistemológico) y hemos saltado al plano de los procesos psicológicos, y adelantemos que precisamente este salto, de ida y vuelta, es el que nos permite lanzar hipótesis, basados en la construcción del conocimiento general, y convertirlas (por vía de una metáfora) en hipótesis sobre la didáctica de las matemáticas; ésta intentará, entonces, retomar aquel proceso a la altura de los individuos, de los niños (en el caso que nos ocupa). El lenguaje aritmético tendrá que ceder lugar ante el algebraico, cada vez más pertinente, aun para las situaciones que desde siempre se habían modelado en la aritmética.

La construcción del nuevo lenguaje, que tendrá que partir de las operaciones aritméticas elementales, pasará, como ya se dijo, por la necesidad de operar nuevos objetos, que significarán no sólo números, sino también representaciones de éstos ya sea como individuos (incógnitas, por ejemplo), ya como conjuntos de números (coeficientes de las ecuaciones, por ejemplo), ya como expresión de relaciones entre conjuntos de números (la variación proporcional, por ejemplo), o ya como funciones, etc. El lenguaje

algebraico tendrá que estructurarse sobre nuevos objetos, cuyas operaciones no quedarán totalmente determinadas hasta que estén bien precisados los contornos del nuevo universo de los objetos, y éstos no estarán totalmente recortados y bien definidos hasta que las nuevas operaciones estén totalmente estructuradas, tanto en sus aspectos semánticos como sintácticos.

Estas etapas de la construcción de campos semánticos y sintácticos corresponde a una estratificación de las acciones que, a la postre, tendrán que identificarse en una misma operación del nuevo nivel de lenguaje.

Como ejemplo final, puede citarse que la constante que se observa en los niños cuando construyen los estratos intermedios que llevan a la posibilidad de resolver problemas que se pueden modelar con la ecuación $Ax + B = C$ y, por ende, con la construcción de la sintaxis necesaria para la resolución de tales ecuaciones, tiene un correlato en la evolución que hay en los libros de abaco y el paso posterior, tal y como, por ejemplo, se expresa en el *Arte Analítico* de Vieta.

Son distintos los códigos de señales que se construyen (hacia los 11 a 13 años de edad) y que se adecuan a la resolución de esos problemas, a los que podemos caracterizar como propios del cono de sombra que se forma entre el lenguaje aritmético bien estructurado y el incipiente aparato conceptual con el que se expresará, al estar totalmente estructurado, el lenguaje algebraico; son distintos códigos de señales, decíamos, que los que usan los adultos (naturalmente, los que los adquieran) al expresarse en el lenguaje algebraico bien estructurado. Baste mencionar, a este respecto, que la necesidad de operar con incógnitas es pospuesta hasta que ya no queda más remedio (permanencia del estrato de lenguaje, recién estructurado, pero bien asimilado a los estratos anteriores); ante la imposibilidad de resolver nuevos problemas con el aparato conceptual recién construido (con sus estratos semántico y sintáctico en determinado grado de evolución alcanzada), y sólo en ese momento, será necesario romper con los códigos de señales recién construidos (pero ya bien estructurados, en determinado nivel), para empezar a preocuparse por disponer de símbolos cuya escritura sucinta (las ecuaciones, por ejemplo) permitan operarlos con cierta habilidad que, a la postre, hacia los 14 años (en la población y en sentido estadístico) permitan usar ple-

namente los estratos ya contruidos, para así ya poder resolver los problemas más difíciles que se plantean los sistemas educativos de estos tiempos como aspiración y objetivo (los problemas de mezclas y aleaciones, proporcionalidad directa e inversa, etc.).

Esta tendencia a anclarse en estratos de lenguaje, que parecían ya superados, está presente en los libros de abaco del siglo XIII: una y otra vez se tenderá a niveles donde la carga semántica de los símbolos es mayor que la habilidad sintáctica que otras situaciones podrían presuponer, aun en las acciones que se pueden modelar con las ecuaciones que antes señalamos: $Ax + B = C$, para cuya resolución no se necesita operar lo representado (en el caso de los problemas, las incógnitas).

EUGENIO FILLOY es profesor e investigador en Matemáticas y Educación, en el Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Sus últimos artículos versan sobre la construcción del lenguaje algebraico. Es director de la serie "Material Educativo", del Fondo Educativo Interamericano. Su último trabajo publicado, dentro de la misma serie, es: "Movimiento de la incógnita: ¿fin de la aritmética?"